Exame 12-07-2007

Parte teórica

1) a) Sistema sub-amortecido $0 < \xi < 1$ com resposta livre à frequência natural amortecida, ou seja quando $t \to \infty$ o sistema tende à posição de equilíbrio estático devido à atenuação da resposta

b) $f(t) = F \cos \omega t$ $\omega \ll \omega_n$ e $\omega \gg \omega_n$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$ $\beta < 1$ $\beta > 1$

A resposta do sistema caracteriza-se por ser do tipo harmónico de frequência igual à frequência de excitação e de amplitude $x(\omega)$ com um deslocamento ϕ em relação à excitação

para $\omega \ll \omega_n$ o sistema apresenta uma grande transmissibilidade $TR > 1$ ou seja $F \gg F$ e a amplitude do sistema tende para zero devido ao factor de amplificação dinâmica tender também para zero.

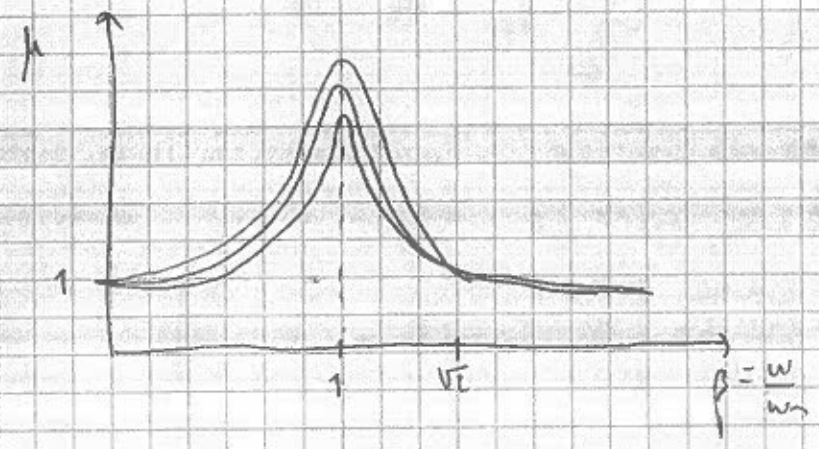
c) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$

Para Baixas frequências $\beta \to 0 \to \omega_n \gg \omega \Rightarrow k \gg m$ a partir daqui se pode ver que para baixas frequências o sistema é controlado essencialmente pela rigidez

Para Altas frequências $\beta \to \infty \to \omega_n \ll \omega \Rightarrow m \gg k$ logo para as altas frequências o sistema é controlado maioritariamente pela massa

para frequências médias $\beta = 1 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \omega \approx \omega_n$

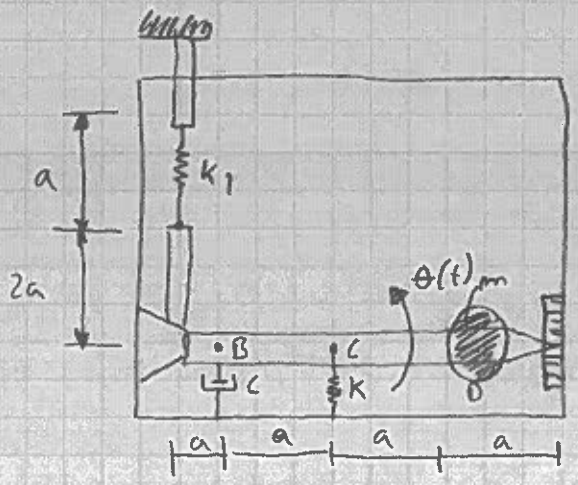
$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \omega_d$ logo o sistema está mais dependente do amortecimento



2)

a) $TR = \frac{FT}{F}$ é a razão entre a amplitude da força transmitida à base do sistema em relação à amplitude da força de excitação em que é dessa forma que $\beta \geq \sqrt{2}$

Parte Prática



$m = 1 kg$

a) $2T = 0,5469 - 0,1447 \Rightarrow T = 0,201$

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-0,3329}{-0,09416} \right) = 0,6314$$

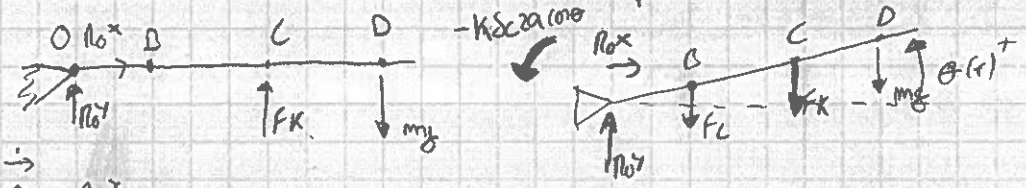
$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi \simeq 0,1$$

b)

$$T = \frac{2\pi}{w_d} \Rightarrow w_d = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,201} = 31,26 \text{ rad/s}$$

$$w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{31,26}{\sqrt{1-0,1^2}} = 31,42 \text{ rad/s}$$

c)



$\vec{F} = \vec{Q}$ $\quad R_{0x} = 0$

$R_{0y} + F_K = mg$

$\vec{M}_{\cdot} = \vec{K}$ $\quad \vec{OB} \times F_C + \vec{OC} \times \vec{F_K} + \vec{OD} \times m\vec{g} = J\ddot{\theta}$

$$\vec{OB} = \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{OC} = \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{OD} = \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad F_K = -K\Delta c = -K \begin{vmatrix} 0 \\ -\delta c \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F_C = -C\dot{\theta}_B = \begin{vmatrix} 0 \\ -C a\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{K}}_O = \dot{\vec{H}}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ J_D\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix} \quad J_D = J_0^0 + md^2 = 0 + m \cdot x(3a)^2 = 9a^2 m$$

Estático

$\vec{M}_O = 0 \quad \vec{OC} \times \vec{FK} + \vec{OD} \times m_s = 0$

$$\begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -FK \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ FK\,a\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3a\,mg\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$2FK\,a\cos\theta - 3a\,mg\cos\theta = 0 \Rightarrow FK = \frac{3}{2}mg \quad (=) \; K\delta = \frac{3}{2}mg \quad \delta = \frac{3}{2}\frac{mg}{K}$

Dinâmico

$$\begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -ca\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -K2a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a\cos\theta \\ 3a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -K\delta c\,2a\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -ca^2\dot{\theta}\cos^2\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2K\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3a\,mg\cos\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \\ \\ -K\delta c\,2a\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 9ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$-ca^2\dot{\theta}\cos^2\theta - 4a^2K\sin\theta\cos\theta + \underbrace{3a\,mg\cos\theta - K\delta c\,2a\cos\theta}_{=0} = 9ma^2\ddot{\theta}$

Linearizando $\cos\theta = 1 \quad \sin\theta = \theta$

$-ca^2\dot{\theta} - 4a^2K\theta = 9ma^2\ddot{\theta}$

$9ma^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + 4a^2K\theta = 0$

a) c e K?

$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{4a^2K}{9ma^2}} \Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{4K}{9m} \Leftrightarrow K = \frac{9}{4}m\omega_n^2$

$K = \frac{9}{4} \times 1 \times 31{,}42^2 = 2221{,}14 \; N/m$

$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_n} \quad c = 2\zeta m_{eq}\omega_n = 2 \times \zeta \, 9ma^2 \times \omega_n$

$c = 2\zeta 9m\omega_n = 2 \times 0{,}1 \times 9 \times 1 \times 31{,}42 = 56{,}56 \; Ns/m^2$

b) $s(t) = S\sin\omega t \qquad S = 5\,mm \qquad \omega = 3\,Hz = 2\pi \times 3 = 6\pi \; rad/s$

$9ma^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + 4a^2K\theta = 4a^2KS\cos(\omega t - \pi/2) - ca^2S\omega\sin(\omega t - \pi/2)$

$= S\sqrt{(4a^2K)^2 + (ca^2\omega)^2}\cos(\omega t + \gamma - \pi/2)$

$x(t) = \frac{Y}{K\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}\cos(\omega t + \gamma - \pi/2)$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{6\pi}{31{,}42} = 0{,}6$

$X(\omega) = \frac{Y}{K}\frac{\sqrt{16a^4K^2 + c^2a^4\omega^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = Y\frac{\sqrt{16a^4K^2 + c^2a^4\omega^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} =$

$= Ya^2\frac{\sqrt{16K^2 + c^2\omega^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = 0{,}005\,a^2\frac{\sqrt{16 \times 2221{,}14^2 + 56{,}56^2 \times (6\pi)^2}}{\sqrt{(1-0{,}6^2)^2 + (2 \times 0{,}1 \times 0{,}6)^2}} = 8{,}19\,a^2$

$$\frac{F}{K}(\omega) = S \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 0{,}005 \times 0{,}552866 = 0{,}002764$$

$$St = u\,a\,\sin\theta = 4\,a\,\theta.$$

$$\theta(\omega) = \frac{X_S}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$X_S = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = S\frac{\sqrt{(4a^2K)^2 + (a^2\omega)^2}}{4a^2K} = S\frac{\sqrt{16\,a^4K^2 + a^4\omega^2C^2}}{4a^2K}$$

$$X_S = \frac{S\,a^2K\sqrt{16 + \omega^2C^2}}{4a^2K} = \frac{0{,}005\sqrt{16 + (6\pi)^2 \times 56{,}56^2}}{4} = 1{,}33267$$

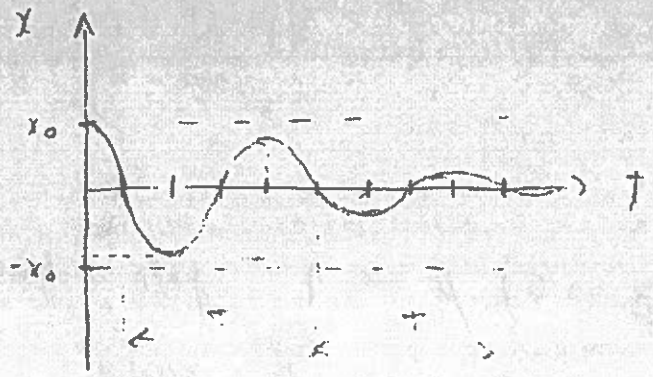
$$X(\omega) = \frac{X_S}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1{,}33267}{\sqrt{(1-0{,}6^2)^2 + (2\times 0{,}1\times 0{,}6)^2}} = 2{,}04664$$

Exame de Recurso de 2007-07-12

Parte Teórica

1) Admite-se que se entende por sistema ligeiramente amortecido um sistema em que: $0 < \xi < 1$

a) Após a perturbação inicial de deslocamento a resposta do sistema será uma resposta livre ou natural amortecida, sendo caracterizada por um harmónico (em decaimento) à frequência natural amortecida $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$, com $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}$.



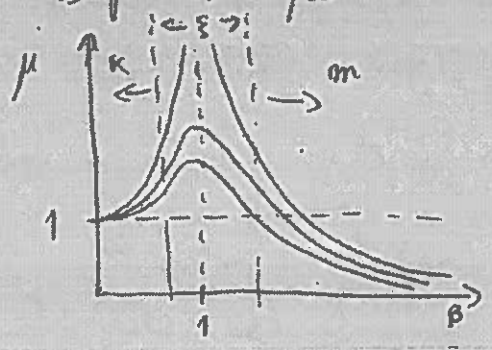
b) Para $\omega \ll \omega_n \Rightarrow \beta \to 0$; $\omega \gg \omega_n \Rightarrow \beta \to \infty$

$$x(t) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Caracterizando apenas a resposta estacionária, é um movimento harmónico com frequência igual à frequência de excitação e com um desfasamento ϕ em relação à solicitação. Se $\omega \ll \omega_n$, $\beta \to 0$, pelo que a amplitude tenderá para $\frac{F}{K}$ (valor do deslocamento estático). Para $\omega \gg \omega_n$, $\beta \to \infty$, pelo que a amplitude tende para zero. (como já mencionado em c), para $\omega \ll \omega_n$ a resposta é "controlada" pela rigidez e para $\omega \gg \omega_n$ a resposta é controlada pela massa.

c) O factor de amplificação dinâmica é um factor adimensional, que multiplicado pelo deslocamento estático, $\frac{F}{K}$, nos dá o valor da amplitude da resposta. Define-se por:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Comentário à afirmação:

A resposta estacionária define-se: $x(t) = \frac{F}{K} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right)}_{= \mu}$

Como podemos ver:

→ Para baixas frequências ($\beta \to 0$) $\mu \to 1$ pelo que $x(t) = \frac{F}{K}$, provando-se a dependência da rigidez

→ Para médias frequências ($\beta \to 1$ ou $\omega \to \omega_n$) $\mu = \frac{1}{2\xi}$ mostrando-se a grande influência do amortecimento (principalmente para baixos valores de ξ)

→ Para altas frequências ($\beta \to \infty$) $\mu \to 0$ e ω torna-muito importante face a ω_n pelo que o termo $\frac{F}{K}$ que também pode ser expresso por $\frac{F}{\omega_n^2 m}$ faz notar que a massa passa a ser a propriedade preponderante.

2) ; 3) ; 4) e 5) não saem.

D